



Semana Nacional de Engenharia Nuclear e da Energia e  
Ciências das Radiações  
Belo Horizonte, 12 a 14 de novembro de 2024.

Id.: EN09

## ANÁLISE COMPARATIVA DE SOLUÇÕES A ANALÍTICAS DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL COM REALIMENTAÇÃO TERMO-HIDRÁULICA

**João Paulo A. Barbosa<sup>1</sup>, Marcelo V. Silva<sup>1</sup>, Diego M. E. Gonçalves<sup>1</sup>, Daniel A. P. Palma<sup>2</sup>,  
Guilherme G. de Almeida<sup>3</sup>, Lucile Daniel Moreira<sup>1</sup>, Anderson Patrício Resende<sup>1</sup> e Giovanni  
L. de Stefani<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro (Av. Horácio Macedo 2030, Bloco G sala 206. Rio de Janeiro RJ  
Brazil)

<sup>2</sup>Comissão Nacional de Energia Nuclear – CNEN (R. General Severiano, 90 – Botafogo – Rio de Janeiro –  
RJ – RJ, 22290-040)

<sup>3</sup>Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ (Av. Governador  
Roberto Silveira, 1900, 28635-000, Prado, Nova Friburgo.)

jpfaur@gmail.com  
mvilela@coppe.ufrj.br  
diegomanuelgoncalves@gmail.com  
dpalmaster@gmail.com  
guilherme.almeida@cefet-rj.br  
lucile.ifrj@yahoo.com.br  
andersonresende@poli.ufrj.br  
giovanni.laranjo@coppe.ufrj.br

**Palavras-chave:** Cinética; Termo-hidráulica; PWR; Runge-Kutta; Python; Transiente

**Area:** Engenharia Nuclear

**Sub-area:** Cinética Pontual

### RESUMO

O artigo propõe um estudo comparativo de soluções analíticas aproximadas do conjunto de Equações da Cinética Pontual com Realimentação Termo-hidráulica (ECPRT). As ECPRT são úteis para predição do comportamento dinâmico e global do núcleo, possibilitando a estimativa do comportamento temporal da potência nuclear bem como da reatividade, a temperatura e a concentração de precursores de nêutrons atrasados em um cenário no qual a separabilidade das partes espacial e temporal do fluxo de nêutrons é válida. A partir de uma revisão de três abordagens diferentes de obtenção de soluções aproximadas das ECPRT durante um transiente de inserção de reatividade foram consideradas. Para comparar as diferentes abordagens consideradas, considerou-se dois parâmetros importantes do ponto de vista da análise de segurança do transiente postulado: o pico de potência e o instante de tempo em que esse pico ocorre. Embora cada solução tenha prós e contras dependendo dos parâmetros cinéticos do reator, a abordagem proposta por Nahla é a mais apropriada globalmente.

## 1 INTRODUÇÃO



A dinâmica de um reator nuclear envolve o equilíbrio entre a produção e a perda de nêutrons, crucial para uma operação segura. A modelagem e simulação do comportamento do reator em situações estacionárias e transientes são fundamentais para garantir sua segurança. O modelo de cinética pontual descreve a evolução temporal da população de nêutrons dentro do reator, amplamente utilizado, é composto por equações que separam o fluxo de nêutrons em partes espaciais e temporais [1]. Ele permite prever o funcionamento dinâmico do reator. Essas equações são frequentemente aplicadas com um grupo de nêutrons prontos e atrasados.

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{l} n(t) + \lambda C(t) \quad (1)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{l} - \lambda C(t), \quad (2)$$

Onde  $n(t)$  é a densidade de nêutrons, que pode representar a potência do reator com fatores multiplicativos, é definida pela relação entre a potência  $P$  e o fluxo de nêutrons  $\Phi$  [2], conforme  $P = \gamma \Sigma_f \int \Phi dV$ , onde  $\gamma$  é a energia média liberada por fissão e  $\Sigma_f$  é a seção macroscópica de fissão. No modelo de cinética pontual, o fluxo de nêutrons  $\Phi$  é separado em uma parte espacial  $\phi(\vec{v}, \Omega)$  e uma parte temporal  $n(t)$ . Como  $\gamma \Sigma_f \int \Phi dV$  não depende do tempo, ele atua como uma constante de proporcionalidade entre a potência  $P$  e a densidade de nêutrons  $n(t)$  [5].  $\rho(t)$  é a reatividade do sistema,  $\beta$  é a fração de nêutrons atrasados,  $l$  é o tempo de vida útil dos nêutrons prontos,  $\lambda$  é a constante de decaimentos dos precursores de nêutrons atrasados e  $C(t)$  é a concentração de precursores de nêutrons atrasados. Essas equações descrevem a densidade de nêutrons e a concentração de precursores de nêutrons atrasados em função do tempo. Elas podem ser resolvidas por métodos analíticos, numéricos ou mistos [1]. A cinética pontual tradicional é usada para simular transientes em reatores nucleares em curtos períodos, visando prever o comportamento do reator e avaliar sua segurança. Um modelo mais avançado integra a realimentação termo-hidráulica ao sistema de equações da cinética pontual [3]. Um modelo mais sofisticado e que leva em consideração a realimentação termo-hidráulica do sistema, ampliando o sistema de equações da cinética pontual expresso pelas equações (1) e (2):

$$\rho(t) = \rho_0 - \alpha [T(t) - T_0] \quad (3)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = k_c n(t) \quad (4)$$

Onde  $[T(t) - T_0]$  é o incremento de temperatura no reator e  $\alpha$  é o coeficiente de reatividade e  $k_c$  é a capacidade térmica do sistema [3].

A partir de uma análise comparativa entre três métodos distintos de soluções analíticas aproximadas para o conjunto de Equações da Cinética Pontual com Realimentação Termo-hidráulica (ECPRT), baseados nos trabalhos de Haofeng Li [4], Wenzhen Chen [8] e Abdallah A. Nahla [9]. O objetivo é avaliar as abordagens propostas por cada autor para a solução dos transientes supercríticos retardados, com foco na inserção de pequenos passos de reatividade e nos efeitos da realimentação térmica no reator. A seguir, descrevem-se as bases metodológicas de cada abordagem.

## 2 METODOLOGIA



A pesquisa desenvolve uma metodologia para implementar numericamente as soluções analíticas dos métodos discutidos, com o objetivo de analisar o pico de potência e o instante em que ocorre, utilizando parâmetros cinéticos específicos e comparando gráficos das soluções analíticas e numéricas, gerados por um programa em Python. Após definir um método numérico de referência, uma análise detalhada é realizada para identificar a potência máxima e o instante correspondente, considerando a realimentação termo-hidráulica e a aproximação prompt jump. Os resultados são apresentados com tabelas e gráficos para diferentes valores de  $k$ , considerando a relação  $\rho_0 = \frac{\beta}{k}$ , utilizando o método de Runge-Kutta com passo de  $10^{-4}$  s como referência.

## 2.1 O Método proposto por Haofeng Li, Wenzhen Chen, Fan Zhang e Lei Luo.

Em seu artigo [4] analisa o processo supercrítico atrasado de um reator com realimentação termo-hidráulica durante a inserção de um pequeno passo de reatividade. Identifica problemas em soluções anteriores e desenvolve uma expressão para a relação entre reatividade e tempo. A análise considera o impacto da reatividade inserida e da potência inicial, comparando dois métodos tradicionais: Aproximação Prompt Jump para nêutrons e para precursores de nêutrons atrasados [5].

Substituindo as equações (2) e (1) na derivada da equação (2), obtém-se

$$\frac{d^2 C(t)}{dt^2} + \frac{(\beta - \rho + \lambda l) \beta}{l} n(t) = \frac{(\beta + \lambda l)}{l} \lambda C \quad (5)$$

Assumindo que a potência varia linearmente com a reatividade e considerando a Aproximação *Prompt Jump* para precursores de nêutrons, obtém-se a expressão

$$\frac{dn(t)}{d\rho(t)} = \frac{-\lambda \rho(t)}{\alpha k_c (\beta + \lambda l)}, \quad (6)$$

que ao ser integrada sob as condições iniciais  $\rho = \rho_0$  e  $n = n_0$ , depois de feitas as devidas substituições, resulta na variação da potência em função da reatividade

$$n(t) = \frac{\lambda}{2\alpha k_c (\beta + \lambda l)} \left\{ \rho_0^2 - \left[ \frac{\rho_1 + \rho_0 - (\rho_1 - \rho_0) \exp\left(\frac{\rho_1 \lambda t}{\beta + \lambda t}\right)}{\rho_1 + \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \exp\left(\frac{\rho_1 \lambda t}{\beta + \lambda t}\right)} \rho_1 \right]^2 \right\} + n_0 \quad (7)$$

onde  $\rho_1 = \sqrt{\frac{\rho_0^2 + 2\alpha k_c (\beta - \rho_0 + \lambda l) n_0}{\lambda}}$

## 2.2 O Método proposto por Wenzhen Chen, Lifeng Guo, Bo Zhu e Haofeng Li.

Estudos clássicos, como os de [6] e [7], utilizam o modelo Nordheim-Fuchs para analisar transientes supercríticos imediatos com realimentação de temperatura, assumindo potência inicial desprezível. Entretanto, pesquisas recentes como [8], ampliam a análise para comportamentos supercríticos retardados e apresentam quatro modelos de solução. Chen conclui que os modelos imediatos não se aplicam aos retardados, exigindo soluções específicas. Além disso, com potência inicial constante, o impacto de fontes externas de nêutrons é desprezível, e a reatividade efetiva é crucial para prever transientes.



Assumindo o sistema supercrítico pronto e, portanto, considerando o efeito da fonte externa de nêutrons, obtém-se a seguinte expressão:

$$n(t) = \frac{1}{2\alpha k_c l} \left\{ (\rho_0 - \beta)^2 - \left[ \frac{A + (\rho_0 - \beta) - [A - (\rho_0 - \beta)] \exp\left(\frac{At}{l}\right)}{A + (\rho_0 - \beta) + [A - (\rho_0 - \beta)] \exp\left(\frac{At}{l}\right)} A \right]^2 \right\} + n_0, \quad (8)$$

$$\text{onde } A = \sqrt{(\rho_0 - \beta)^2 + 2\alpha k_c n_0}.$$

### 2.3 O Método proposto por Abdallah A. Nahla

No trabalho de [9], é feita uma análise das equações de cinética pontual com realimentação termo-hidráulica, considerando um grupo de nêutrons atrasados. Utilizando uma expansão em série da densidade de nêutrons, o autor deriva soluções analíticas para a densidade de nêutrons e precursores em função da reatividade. A modelagem da reatividade como função da temperatura permite incluir efeitos de realimentação negativa, fornecendo uma ferramenta eficaz para prever transientes próximos ao crítico imediato.

$$n(t) = n_1(t) + ln_2(t) + \dots, \quad (9)$$

sendo

$$n_1(t) = \frac{\lambda}{2\alpha k_c} \left( \frac{\sigma^2 - \rho^2}{\beta - \rho} \right), \quad \rho_0 < \beta \quad (10)$$

e

$$n_2(t) = \frac{\lambda^2(\sigma^2 - \rho^2)}{4\alpha k_c(\beta - \rho)} \left[ \frac{4\beta(\beta^2 - \sigma^2)}{(\beta^2 - \sigma^2)^2} \ln\left(\frac{\rho - \beta}{\rho_0 - \beta}\right) - \frac{2\beta}{(\beta - \sigma)^2} \ln\left(\frac{\rho - \sigma}{\rho_0 - \sigma}\right) - \frac{2\beta}{(\beta + \sigma)^2} \ln\left(\frac{\rho + \sigma}{\rho_0 + \sigma}\right) + \frac{(3\beta^2 - \sigma^2)\rho^2 - \beta(7\beta^2 + \sigma^2)\rho + 5\beta^4 + \sigma^4 - 2\beta^2\sigma^2}{(\sigma^2 - \beta^2)(\beta - \rho)^3} - A \right] \quad (11)$$

$$\text{onde } \sigma = \sqrt{\rho_0^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right) \alpha k_c n_0 (\beta - \rho_0)} \text{ e } A = \frac{(3\beta^2 + \sigma^2)\rho_0^2 - \beta(7\beta^2 + \sigma^2)\rho_0 + 5\beta^4 + \sigma^4 - 2\beta^2\sigma^2}{(\sigma^2 - \beta^2)(\beta - \rho)^3}.$$

## 3 RESULTADOS

Esta seção, a partir da revisão dos resultados da literatura propõe-se uma metodologia numérica às soluções analíticas para examinar o pico de potência e seu instante de ocorrência, determinando a eficácia dos métodos. Os parâmetros cinéticos da Tabela 1 são utilizados em todas as avaliações, e gráficos das soluções são gerados via um software desenvolvido em Python.

Grandeza	Valor
$\alpha$	$5,0 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$
$k_c$	$5,0 \times 10^{-2} \text{K/MW.s}$



$\beta$	$6,5 \times 10^{-4}$
$\lambda$	$7,741 \times 10^{-2} \text{s}^{-1}$
$l$	$10^{-4} \text{s}$
$T_0$	300K
$P_0$	10MW
$\rho_0$	$\frac{\beta}{k}, k \in [2, 5]$

Tabela 1: Parâmetros cinéticos [10].

### 3.1 Análise comparativa da Potência.

Nesta seção, são analisados os resultados com realimentação termo-hidráulica e a aproximação prompt jump. A solução de referência foi obtida usando o método de Runge-Kutta com passo de  $10^{-4}$  s. Gráficos foram gerados em Python para mostrar a variação da potência e seus picos conforme a reatividade inicial. Na Figura 1, os picos variam com a reatividade, e na Figura 2, os picos ocorrem entre 40s e 60s na solução analítica, e entre 20s e 40s na numérica. O método de Li se aproxima da solução numérica conforme  $\rho_0$  diminui.

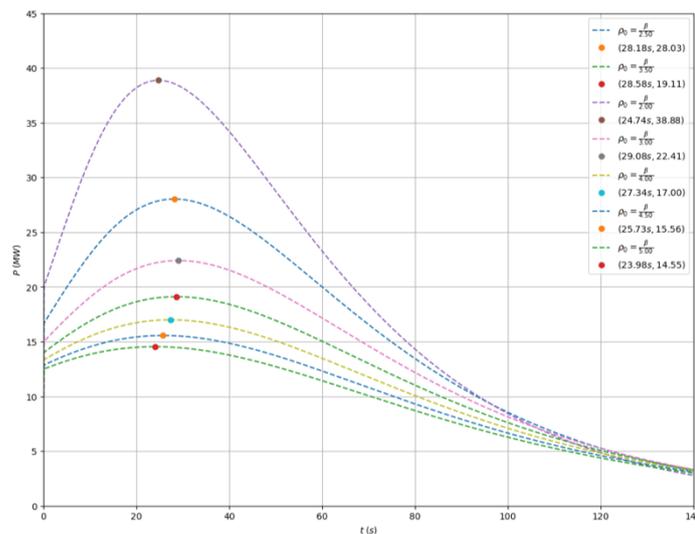


Figura 1: Pico de potência em função do tempo – solução numérica.

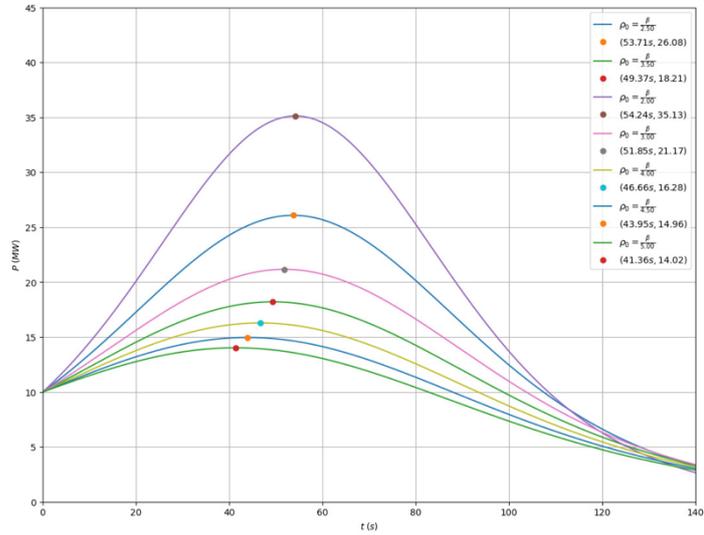


Figura 2: Pico de potência em função do tempo – Li, 2007.

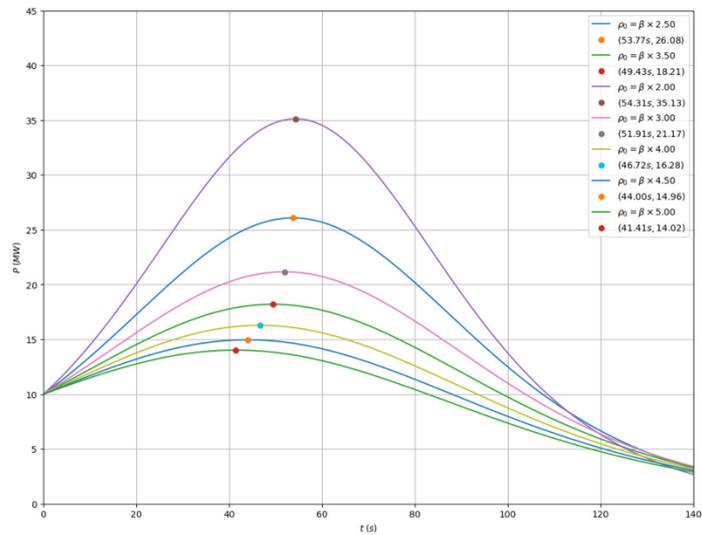


Figura 3: Pico de potência em função do tempo – Chen, 2007.

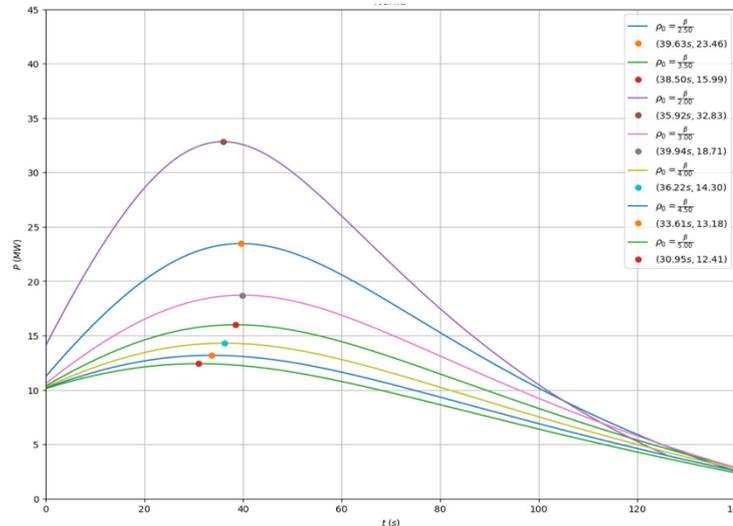


Figura 4: Pico de potência em função do tempo – Nahla, 2009.

Os quatro gráficos obtidos mostram a variação da potência em função do tempo para diferentes métodos de solução das equações da cinética pontual com realimentação termo-hidráulica. No primeiro gráfico, a solução numérica revela picos de potência que variam conforme a reatividade inicial, com os picos ocorrendo mais rapidamente (entre 20 e 40 segundos) do que nas soluções analíticas. O segundo gráfico, com base no método proposto por Li, mostra uma aproximação gradual da solução numérica à medida que a reatividade inicial  $\rho_0$  diminui, com os picos ocorrendo entre 40 e 60 segundos. No terceiro gráfico, baseado no método de Chen, observa-se que os modelos supercríticos imediatos e retardados não são intercambiáveis, conforme indicado pela inconsistência de picos em diferentes reatividades iniciais, com a solução sendo válida apenas para  $\rho_0 > \beta$ . Finalmente, no quarto gráfico, referente ao método proposto por Nahla, os picos de potência são consistentes com a solução numérica, havendo pequenas diferenças no tempo de estabilização, mas ainda apresentando boa concordância com o método de referência. Assim, cada método traz aproximações diferentes, sendo que o método de Li se aproxima mais da solução numérica quando  $\rho_0$  diminui, enquanto os outros métodos são mais sensíveis à condição inicial de reatividade.

### 3.2 Análise quantitativa dos métodos.

A análise comparou soluções analíticas da literatura para identificar os picos de potência, destacando o impacto da reatividade inicial. A relação  $\rho_0 = \frac{\beta}{k}$ , revelou um "salto" nos picos de potência. Os métodos de Li e Chen mostraram previsões precisas e consistentes com o método de referência. O método de Nahla indicou que a redução da fração de nêutrons retardados diminui a reatividade inicial e a potência. Com reatividade inicial de um terço da fração de nêutrons retardados, Li e Chen apresentaram desvios percentuais menores, alinhando-se ao método de referência, com o aumento de  $k$ .



<b>k</b>	<b>Grandeza</b>	<b>Proposto</b>	<b>Li</b>	<b>Chen</b>	<b>Nahla</b>
2	Potência máxima (MW)	33,88	35,23	35,13	32,83
	Instante do pico de potência (IPP) (s)	24,71	76,19	76,28	35,92
	Desvio % Potência	--	9,6	9,6	15,6
	Desvio % (IPP)	--	207,9	208,3	45,2

Tabela 2: Variação do Pico de potência com  $\rho_0 = \frac{\beta}{k}$ ,  $k = 2$ .

<b>k</b>	<b>Grandeza</b>	<b>Proposto</b>	<b>Li</b>	<b>Chen</b>	<b>Nahla</b>
3	Potência máxima (MW)	22,41	21,17	21,17	18,71
	Instante do pico de potência (IPP) (s)	29,08	56,10	56,17	39,94
	Desvio % Potência	--	5,3	5,3	16,5
	Desvio % (IPP)	--	92,9	93,2	37,3

Tabela 3: Variação do Pico de potência com  $\rho_0 = \frac{\beta}{k}$ ,  $k = 3$ .

<b>k</b>	<b>Grandeza</b>	<b>Proposto</b>	<b>Li</b>	<b>Chen</b>	<b>Nahla</b>
4	Potência máxima (MW)	17,00	16,28	16,28	14,30
	Instante do pico de potência (s)	27,34	45,33	45,38	36,22
	Desvio % Potência	--	4,2	4,2	15,9
	Desvio % (IPP)	--	65,8	65,9	32,5

Tabela 4: Variação do Pico de potência com  $\rho_0 = \frac{\beta}{k}$ ,  $k = 4$ .

A análise comparou soluções analíticas para prever os picos de potência em transientes supercríticos, destacando a influência da reatividade inicial  $\rho_0$  e a relação  $\rho_0 = \frac{\beta}{k}$ . Observou-se que essa relação causa um "salto" nos picos de potência, especialmente nos valores de  $k = 2$ , onde a reatividade inicial é metade da fração de nêutrons atrasados. Os métodos de Li e Chen apresentaram previsões bastante precisas, com desvios percentuais menores em relação ao método numérico de referência, particularmente no caso de  $k = 3$ , onde ambos registraram apenas 5,3% de desvio na potência máxima. Nahla, por outro lado, mostrou maior sensibilidade à fração de nêutrons atrasados, com desvios de até 16,5% para  $k = 3$ . Em termos de tempo para o pico de potência, os métodos de Li e Chen apresentaram desvios consideráveis, acima de 90%, enquanto Nahla demonstrou um desempenho mais consistente, com desvios menores, especialmente para  $k = 2$  e  $k = 4$ . A média dos desvios percentuais ao longo dos transientes para a potência máxima foi de 5,5% para Li e Chen e 15,8% para Nahla, indicando que Li e Chen se alinham melhor ao método numérico de referência quando  $k$  aumenta. Adicionalmente, é possível avaliar o desvio percentual médio, definido como a média dos desvios percentuais dos quatro transientes considerados. Na Tabela 6 a seguir é possível visualizar o desvio percentual médio em relação ao método numérico de referência para as metodologias apresentadas no presente estudo.



<b>Desvio %</b>	<b>Li</b>	<b>Chen</b>	<b>Nahla</b>
Potência máxima (MW)	5,5%	5,5%	15,8%
Tempo (s)	98,6	71,7	35,7

Tabela 6: Média dos desvios percentuais.

#### 4 CONCLUSÃO

Este estudo avaliou as Equações da Cinética Pontual (ECP) com realimentação termo-hidráulica, desenvolvendo uma metodologia computacional em Python para criar um benchmark. Foram comparados três métodos de solução aproximada das ECPs durante um transiente de inserção de reatividade. Os resultados mostraram que os métodos de Li e Chen tiveram o menor desvio médio percentual (5,51%) em relação ao método numérico de referência no pico de potência. O método de Nahla, apesar de mais complexo e com um desvio médio de 35,72%, apresentou maior precisão quando o pico ocorre, evidenciando uma boa concordância geral com o método de referência. Desta forma, a proposta deste artigo oferece contribuição importante para a previsão de transientes em reatores nucleares.

#### 5 REFERÊNCIAS.

- [1] F.V.TUMELERO, M. T. M DE BARRETO and C.M.F. LAPA. Solução do problema da Cinética de Difusão de Nêutrons com representação analítica.
- [2] J.R. LAMARSH and A. J. BARATTA. Introduction to Nuclear Engineering.
- [3] T. M. PAGANIN and M. T. VILHENA. On a point kinetic model for nuclear reactors considering the variation in fuel composition. \*Progress in Nuclear Energy\*, v. 118, p. 103134, fev. 2020. DOI: 10.1016/j.pnucene.2019.103134.
- [4] H. LI, et al. Approximate solutions of point kinetics equations with one delayed neutron group and temperature feedback during delayed supercritical process. \*Annals of Nuclear Energy\*, v. 34, n. 6, p. 521–526, fev. 2007. DOI: 10.1016/j.anucene.2007.02.014.
- [5] J. P. A. BARBOSA. Análise de Soluções de Equações da Cinética Pontual com Realimentação Termohidráulica. 2024. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Engenharia Nuclear, Rio de Janeiro.
- [6] D. L. HETRICK. Dynamics of Nuclear Reactors. 2. ed. New York, USA: American Nuclear Society, 1993.
- [7] S. GLASSTONE and A. SESONSK Nuclear Reactor Engineering. 1. ed. New York, USA: Springer New York, 1994.
- [8] W. CHEN, L. GUO, B. ZHU and H. LI. (2007). Accuracy of analytical methods for obtaining supercritical transients with temperature feedback. Progress in Nuclear Energy - PROG NUCL ENERGY. 49. 290-302. 10.1016/j.pnucene.2007.01.004.



Semana Nacional de Engenharia Nuclear e da Energia e  
Ciências das Radiações  
Belo Horizonte, 12 a 14 de novembro de 2024.

Id.: EN09

[9] A. A. NAHLA. An analytical solution for the point reactor kinetics equations with one group of delayed neutrons and the adiabatic feedback model. \*Progress in Nuclear Energy\*, v. 51, n. 1, p. 124-428, jan. 2009. DOI: 10.1016/j.pnucene.2008.01.008.

[10] D. A. P. PALMA, et al. An alternative technique for the implementation of an analytical approximation for transients with temperature feedback. In: NUCLEAR INTERNATIONAL ATLANTIC CONFERENCE, 2009, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Anais [...]. 2009.